Ebene Algebraische Kurven 11. Juli 2016

(5.4) Weitere Beispiele von birationalen Transformationen

Fixiere r Punkte: $P_1, P_2, P_3, ...P_r \in \mathcal{P}^2$ und seien $m_1, m_2, m_3, ...m_r$ die dazugehoerigen Multiplizitäten. Es ergibt sich das Linearsystem:

$$V_1(m_1P_1, m_2P_2, ..., m_rP_r) = \{F \in \mathbb{C}[x,y,z]_d \big| mult_{pi}(F) \geq m_i\}$$

Für dieses gilt:

$$dim(V_d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} \text{ und } mult_o \geq m_i$$

Es existieren $\frac{m_i(m_i+1)}{2}$ lineare Bedingungen an die Koeffizienten von F. Es handelt sich also um einen linearen Raum.
Wenn die Bedingungnen linear unabhängig sind, ist

$$dim(V_d(m_1P_1, ..., m_rP_r)) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i+1)}{2} := N \text{ (I)}$$

Bemerkung Im Allgemeinen ist die Dimension natürlich größer!

Da wir eine birationale Abbildung entwickeln wollen, nehmen wir an, dass $N = 3$, sodass

$$V_d(m_1P_1, ..., m_rP_r) = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$$

Dann erhalten wir eine Abbildung von $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ mit $p \mapsto (F_1(p) : F_2(p) : F_3(p))$
Außerdem sollen zwei Systemkurven der Art $\lambda F_1 + \mu F_2 + \nu F_3 = 0$ nur einen Schnittpunkt außer der Basis haben.

$$d^2 = 1 + \sum_{i=1}^{r} m_i^2 \text{ (II)}$$

Bemerkung Die Schnittmultipizität zweier Kurven, die sich im Punkt P schneiden, ist größergleich dem Produkt der Multiplizitäten:

$$I(\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{P}) \geq mult_{pi}(\mathcal{C}) \cdot mult_{pi}(\mathcal{D})$$

Und es gilt Gleichheit wenn C und D keine gemeinsamen Tangenten in P haben.
Aus (I) und $N = 3$ folgt:

$$\begin{aligned} 6 &= (d+1)(d+2) - \sum m_i^2 - \sum m_i \\ &= d^2 + 3d + 2 - \sum m_i^2 - \sum m_i \end{aligned}$$

zusammen mit

$$\text{(II) } d^2 = 1 + \sum m_i^2$$

erhalten wir:

$$6 = 3d + 2 - (d^2 - 1) - \sum m_i$$

Durch Umstellen erhalten wir: $3d - 3 = \sum_{i=1}^{r} m_i$. Wir suchen also d, m_i und r so, dass:

$$\begin{aligned} 3d - 3 &= \sum m_i \\ d^2 - 1 &= \sum m_i^2 \end{aligned}$$

erfüllt ist.

<u>Test für $d = 2$:</u>

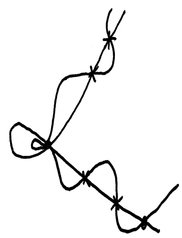
$$\begin{aligned} 3 &= \sum m_i \\ 3 &= \sum m_i^2 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ eine Loesung ist: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$
$\Rightarrow$ Dies entspricht gerade der Cremona Transformation

<u>Test für $d = 3$:</u>

$$\begin{aligned} 6 &= \sum m_i \quad 2,1,1,1,1 \\ 8 &= \sum m_i^2 \quad 4,1,1,1,1 \text{ alternative Schreibweise: } V_3(2^1, 1^4) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Vektorraum hat Dimension 3
$\Rightarrow$ ebenfalls eine birationale Funktion



Test für $d = 4$:

$$\begin{array}{rll} 9 = \sum m_i & 3,1,1,1,1,1,1 & \\ 15 = \sum m_i^2 & 9,1,1,1,1,1,1 & V_3(3^1, 1^6) \\ & 2,2,2,1,1,1 & \\ & 4,4,4,1,1,1 & V_3(2^3, 1^3) \end{array}$$

$\Rightarrow$ ebenfalls eine birationale Transoformation

Für $d = 5$:

$$V_5(4^1, 1^8),\ V_5(3^1, 2^3, 1^3),\ V_5(2^6)$$

Für beliebige d gilt allgemein:

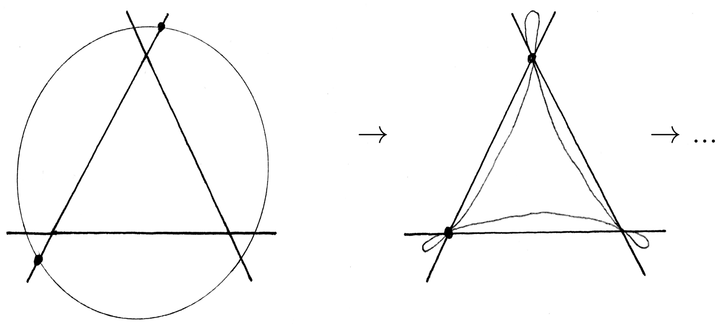
$V_d((d-1)^1, 1^{2d-2})$ (Die Jonquière's Transformation)

$$(d-1)^2 + 2d - 2 \overset{!}{=} d^2 - 1$$

Hier handelt es sich um nicht-triviale birationale Transformationen!

(5.5) Defekt

Cremona Transformation



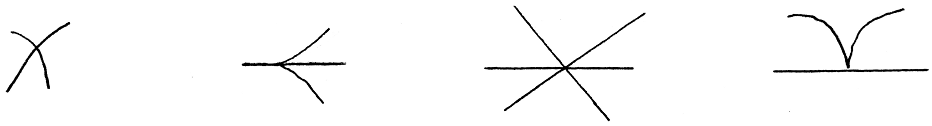
Eine Kennzahl ändert sich nicht!

Erinnerung

Sei $p \in \mathcal{C}$ ein gewöhnlicher m-fach Punkt

$$\iff$$

$mult_{pi}(\mathcal{C}) = m$, in $\mathcal{P}$ hat $\mathcal{C}$ m unterschiedliche singuläre Tangenten!



o.k. Multiplizität = 2 nicht okay okay nicht okay

Definition (Cayley) Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ eine Kurve vom Grad d, mit nur gewöhnlichen Singularitäten P_1, ... ,P_r mit $mult_{pi}(\mathcal{C}) = m_i$, dann ist:

$$\Delta(\mathcal{C}) := \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i-1)}{2}$$

der sogenannte Defekt.

Bemerkung Wenn $\mathcal{C}$ glatt ist, gilt: $\Delta(\mathcal{C}) = \mathrm{g}(\mathcal{C})$ (Geschlecht)

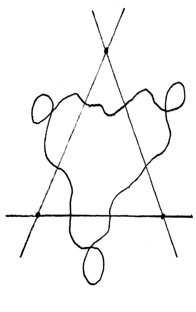
Satz Sei φ eine birationale Transformation:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & \cup & & \cup \\ & \mathcal{C} & \dashrightarrow & \mathcal{C}' \end{array}$$

Angenommen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ haben nur gewöhnlichen Singularitäten, dann $\Delta(\mathcal{C}) = \Delta(\mathcal{C}')$.

Beweis. Es reicht dies für eine einzige Cremona Transformation zu zeigen:

1. Fall: Die Basis Punkte der Transformation liegen nicht auf $\mathcal{C}$ und die Verbindungsgeraden schneiden $\mathcal{C}$ transversal (keine Beruehrungspunkte).



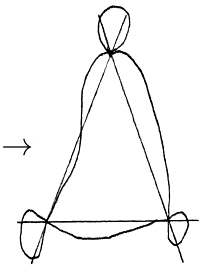
Rechnung:

$$\Delta(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum$$
$$\Delta(\mathcal{C}') = \frac{(2d-1)(2d-2)}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot d(d-1) - \sum$$

Durch Nachrechnen lässt sich zeigen, dass:

$$\frac{(2d-1)(2d-2)}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot d(d-1) \overset{!}{=} \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Allgemeiner Fall: Es seien P_1, P_2, P_3 Basispunkte der Cremona Transformation mit $mult_{pi} = m_i$.

Alle Muliplizitäten sind 2 $\rightarrow$ 

Rechnung:

$$\Delta(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{m_1(m_1-1)}{2} - \frac{m_2(m_2-1)}{2} - \frac{m_3(m_3-1)}{2} - \sum$$
$$\Delta(\mathcal{C}') = \frac{(2d-m_1-m_2-m_3-1)(2d-m_1-m_2-2)}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot d(d-1) - \sum$$

Die Singularitäten in den Basispunkten verschwinden!

$$\begin{aligned}\Delta(\mathcal{C}') = & \frac{(d-m_1-m_2)(d-m_1-m_2-1)}{2} \\ & - \frac{(d-m_2-m_3)(d-m_2-m_3-1)}{2} \\ & - \frac{(d-m_1-m_3)(d-m_1-m_3-1)}{2} - \sum\end{aligned}$$

Durch Nachrechnen folgt: $\Delta(\mathcal{C}') = \Delta(\mathcal{C})$. ■

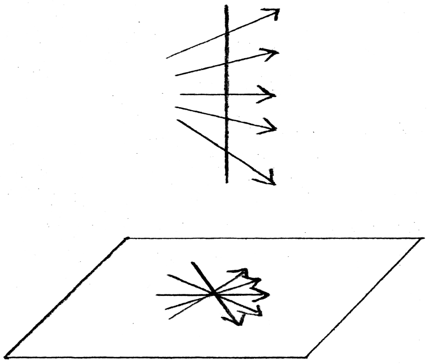
(5.6) Auf- und Runterblasen

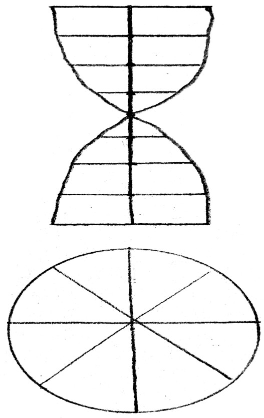
Es sei V ein beliebiger Vektorraum mit $0 \in V$. Außerdem sei $P(V)$ die Menge der Ursprungsgeraden mit der Länge $|0P|$ mit $P \in V \backslash \{0\}$ und der Raum aller Richtungen in V bei 0.
Idee: Wir wollen den Punkt 0 durch die Menge aller Richtungen in 0 ersetzen:

$$\begin{array}{ll} (p,l) & \in \widetilde{V} = \{(p,l) \in V \times \mathbb{P}(V) | p \in l\} \\ \downarrow & \quad \downarrow \pi \\ p & \in V \end{array}$$

mit

$$\pi^{-1}(p) = \begin{cases} \mathbb{P}(V), \text{ wenn p=0} \\ \tilde{P} = (P, |0P|), \text{ ein einziger Punkt} \end{cases}$$





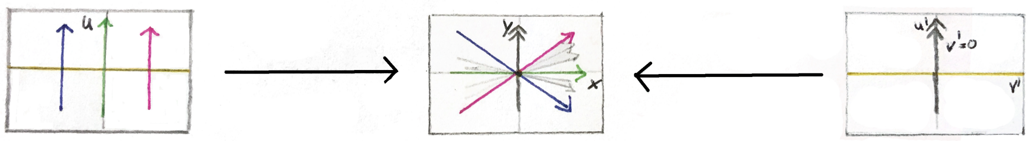
$\subset \widetilde{V}$

$\downarrow$

$\subset V$

Beschreibung mit Koordinaten (Fall $dimV = 2$)

$(u,v) \mapsto (u,uv)$ $\qquad$ $(u^{'}v^{'}, u^{'}) \mapsfrom (u^{'}, v^{'})$



$\mathbb{C}^2$ $\qquad$ $\mathbb{C}^2$ $\qquad$ $\mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} u \neq 0 : x &= u \\ y &= uv \\ v &= \frac{y}{u} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= u^{'}v^{'} \\ y &= u^{'} \\ v^{'} &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathcal{C}_2}$ Mannigfaltigkeit überdeckt mit 2 Karten I, II:

$$u = x = u^{'}v^{'} \text{ und } uv = y = u^{'}$$

$$\Rightarrow u^{'} = uv \text{ und } v^{'} = \frac{u}{u^{'}} = \frac{u}{uv} = \frac{1}{v}$$

Was ist der Nutzen dieser Abbildung? Einerseits werden wir sehen, dass die Cremona Transformation zustande kommt in dem wir drei Punkte aufblasen und in andere Richtung drei Kurven runterblasen (VL 14.07.2016). Man kann durch diese Transformation leicht nachvollziehen was mit einer Kurve passiert!

(5.7) Total und strikt Transformierte einer Kurve

Sei $f(x,y)=0$ die affine Gleichung einer Kurve aus der affinen Ebene $\mathbb{C}^2$

<u>Totaltransformierte:</u>
Karte I: $f(u,uv)=0$
Karte II: $f(u'v',u')=0$

Proposition Es ist

$$f(u,uv) = u^m \tilde{f}(u,v) \text{ für ein } \tilde{f}(u,v) \in \mathbb{C}[u,v]$$
$$f(u'v',u') = (u^{'})^m \tilde{\tilde{f}}(u^{'},v^{'}) \text{ für ein } \tilde{\tilde{f}}(u^{'},v^{'}) \in \mathbb{C}[u^{'},v^{'}]$$

wobei $m = mult_{pi}(f)$.

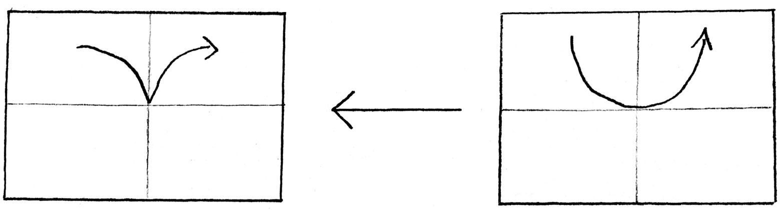
Beispiel $f = x^2 - y^2$

$$\text{Karte I: } u^2 - u^3v^3 = u^2 \underbrace{(1-uv^3)}_{\tilde{\tilde{f}}} = f(u,uv)$$
$$\text{Karte II: } (u^{'},v^{'})^2 - (u^{'})^3 = (u^{'})^2 \underbrace{((v^{'})^2 - (u)^{'})}_{\tilde{\tilde{f}}(u^{'},v^{'})}$$

Definition Strikt Transformierte von $f=0$

$$\text{Karte I: } \tilde{f}(u,v) = 0$$
$$\text{Karte II: } \tilde{\tilde{f}}(u^{'},v^{'}) = 0$$

$(u^{'}v^{'},u^{'}) \hookleftarrow (u^{'},v^{'})$



mit Singularität ohne Singularität